Created by PDF Combine Unregistered Version
If you want to remove the watermark, Please register

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Menurut Sampson (1990) model rantai Markov dapat digunakan untuk menggambarkan dinamika sosial. Asumsi yang harus dipenuhi agar suatu fenomena dinamika sosial dapat digambarkan dengan model rantai Markov adalah aturan *memoryless* dan aturan waktu homogen. Ini berarti sejarah perpindahan dari sebuah objek tidak mempengaruhi penentuan perpindahan objek selanjutnya dan distribusi probabilitas perpindahan dari sebuah objek hendaknya homogen selama proses berlangsung. Salah satu fenomena dinamika sosial yang memenuhi kedua syarat ini adalah perpindahan pekerja yang tidak berketrampilan dari satu bidang pekerjaan ke bidang pekerjaan lainnya.

Menurut Jorgensen (2005) para majikan (pemilik lapangan pekerjaan) sering menganggap ketrampilan dari seorang pekerja tidaklah penting. Anggapan yang diyakini adalah dengan berjalannya waktu para pekerja akan mampu beradaptasi dengan bidang pekerjaan yang dijalaninya. Faktanya kemampuan beradaptasi dari setiap pekerja tidak sama. Oleh karena itu muncullah ketidakpuasan terhadap pekerja yang kurang mampu beradaptasi baik dari pihak majikan maupun rekan-rekan kerja. Dari ketidakpuasan-ketidakpuasan ini akan timbul konflik di lingkungan kerja dan mengakibatkan pekerja yang tidak berketrampilan merasa tertekan. Pada situasi seperti ini ada dua hal yang dapat dilakukan oleh para pekerja yang tidak berketrampilan yaitu bertahan pada bidang pekerjaannya atau berpindah ke bidang pekerjaan yang lainnya.

Menurut Sampson (1990) tingginya angka mobilitas penduduk dapat mencerminkan keadaan ekonomi suatu daerah, sehingga perpindahan para pekerja yang tidak berketrampilan dari satu bidang pekerjaan ke bidang pekerjaan yang lain secara sosial merupakan masalah yang perlu diperhatikan. Oleh karena itu model rantai Markov dapat digunakan untuk membantu menggambarkan perpindahan pekerja yang tidak berketrampilan ini. Dua aturan penting dalam proses rantai Markov telah dipenuhi oleh fenomena perpindahan pekerja yang tidak berketrampilan. Pertama, aturan *memoryless*, bahwa ketiadaan ketrampilan mengakibatkan penentuan bidang pekerjaan selanjutnya tidak dipengaruhi sejarah pekerjaannya terdahulu. Kedua, aturan waktu homogen, populasi pekerja yang tidak berketrampilan ini identik (tidak ada karakteristik yang dapat membedakan seorang pekerja dengan pekerja yang lain), sehingga distribusi probabilitas transisi dari setiap pekerja homogen.

Penulisan skripsi ini mengkaji ulang proses Markov dan model rantai Markov dengan mengambil pekerja yang tidak berketrampilan sebagai objeknya. Kemudian untuk lebih memahami penggunaanya akan disertakan penyelesaian dari sebuah contoh kasus.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah, maka permasalahan yang dibahas dalam penulisan skripsi ini adalah bagaimana menentukan estimasi probabilitas transisi dari model rantai Markov untuk pekerja yang tidak berketrampilan.

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini dibatasi pada penerapan metode maksimum likelihood untuk menentukan estimasi parameter model rantai Markov untuk pekerja yang tidak berketrampilan.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah dapat menentukan estimasi probabilitas transisi dari model rantai Markov untuk pekerja yang tidak berketrampilan.

1.5 Manfaat Penulisan

Dengan tercapainya tujuan, penulisan skripsi ini diharapkan dapat menambah wawasan mengenai ilmu statistik khususnya proses stokastik yaitu model rantai Markov dan penerapannya terhadap kasus perpindahan pekerja yang tidak berketrampilan.

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Tinjauan Pustaka

Untuk dapat menyelesaikan pembahasan tentang model rantai Markov maka diperlukan teori-teori dasar yang meliputi :

2.1.1 Ruang Sampel, Kejadian, Variabel Random dan Probabilitas

Menurut Bain dan Engelhardt (1992) pengertian dari ruang sampel, kejadian, variabel random dan probabilitas adalah sebagai berikut

Definisi 2.1.1. *Ruang sampel dari sebuah eksperimen, diberikan dengan notasi S adalah himpunan semua hasil (outcome) yang mungkin dari eksperimen tersebut.*

Definisi 2.1.2. *Jika ruang sampel S terbatas dan tak terbatas terhitung maka ruang sampel tersebut dikatakan sebagai ruang sampel diskrit.*

Definisi 2.1.3. *Sebuah kejadian (event) adalah sebarang subset dari hasil yang termuat dalam ruang sampel S.*

Definisi 2.1.4. *Variabel random X adalah suatu fungsi yang memetakan setiap hasil yang mungkin dari e dengan suatu bilangan real x sedemikian sehingga* $X(e) = x$.

Definisi 2.1.5. *Probabilitas adalah kemungkinan terjadinya suatu peristiwa diantara keseluruhan peristiwa yang mungkin terjadi.*

Definisi 2.1.6. *Jika himpunan semua nilai yang mungkin dari variabel random X merupakan himpunan terhitung* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *atau* $x_1, x_2, \ldots.$ *maka X disebut variabel random diskrit. Fungsi* $f(x) = P[X = x]$ *untuk* $x = x_1, x_2, \ldots.$ *disebut fungsi kepadatan probabilitas.*

Definisi 2.1.7. *Fungsi distribusi kumulatif dari variabel random X didefinisikan untuk sembarang bilangan real x dengan*

$$F(x)=P[X \leq x].$$

2.1.2 Proses Stokastik

Taylor dan Karlin (1984) menyatakan bahwa proses stokastik adalah himpunan variabel random X_t, dimana t berjalan pada himpunan indeks $T=\{0,1,2,3,...\}$. Jika elemen-elemen himpunan terhitung, maka proses dapat dinotasikan dengan $X_1, X_2, ...$ dan proses disebut sebagai proses stokastik waktu diskrit.

State digunakan untuk menunjukkan status batasan yang mengikat semua tahap secara bersama-sama. Himpunan nilai-nilai yang berbeda yang diasumsikan dalam proses stokastik disebut ruang *state.*

2.1.3 Proses Markov

Definisi 2.1.8 (Parzen, 1962). *Proses stokastik dengan parameter diskrit* $\{X(t), t = 0,1,2,....\}$ *atau proses stokastik dengan parameter kontinu* $\{X(t), t \geq 0\}$ *disebut sebagai proses Markov, jika untuk sembarang nilai* $t_1 < t_2 < .... < t_n$, *distribusi bersyarat dari* $X(t_n)$ *untuk nilai* $X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n)$ *hanya bergantung pada* $X(t_{n-1})$. *Dalam notasi matematika dapat dituliskan sebagai*

$$P\{X(t_n) \leq x_n \mid X(t_1) = x_1, ..., X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} = P\{X(t_n) \leq x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} .$$

Definisi 2.1.9 (Parzen, 1962). *Proses Markov yang mempunyai ruang state diskrit disebut rantai Markov waktu diskrit.*

Definisi 2.1.10 (Kulkarni, 1991). *Rantai Markov waktu diskrit* $\{X_n, x \geq 0\}$ *dikatakan homogen jika probabilitas bersyarat* $P\{X_{n+1} \in A \mid X_n = x\}$ *independen terhadap n,* $\forall x \in S$ *dan* $A \subset S$ *dan*

$$p_{ij}(n) = p_{ij}, \qquad \forall n \geq 0,\ i, j \in S.$$

Taylor dan Karlin (1984) mengatakan bahwa probabilitas bersyarat dari X_{n+1} berada di *state* j dengan syarat X_n berada di *state* i disebut probabilitas transisi satu langkah dan dinotasikan dengan $p_{ij}^{n,n+1}$, yaitu

$$p_{ij}^{n,n+1} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}. \tag{2.1.1}$$

Persamaan (2.1.1) menekankan bahwa secara umum probabilitas transisi tidak hanya fungsi dari *state* awal tapi juga fungsi dari *state* akhir. Jika probabilitas transisi independen terhadap variabel waktu n, maka dapat dikatakan proses Markov tersebut mempunyai probabilitas transisi stasioner. $p_{ij}^{n,n+1} = p_{ij}$ yang independen terhadap n dan p_{ij} adalah probabilitas bersyarat bahwa nilai *state* mengalami sebuah transisi dari j ke i dalam satu percobaan. Biasanya nilai p_{ij} disusun pada sebuah matriks sebagai berikut :

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0i} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1i} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2i} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ii} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

atau $\boldsymbol{P} = \lfloor p_{ij} \rfloor$ disebut matriks Markov atau matriks probabilitas transisi.

Baris ke-$(i+1)$ dari $\boldsymbol{P}$ adalah distribusi probabilitas dari nilai-nilai $X_{n+1} = i+1$ dengan syarat $X_n = i$. Jika banyaknya *state* berhingga, maka $\boldsymbol{P}$ adalah sebuah matriks bujursangkar berhingga dengan order (jumlah baris) sama dengan banyaknya *state*. Kuantitas p_{ij} memenuhi kondisi berikut

$$p_{ij} \geq 0 \qquad \text{, untuk } i, j = 0, 1, 2 \ldots$$

dan

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = 1 \qquad \text{, untuk semua } i = 0, 1, 2 \ldots$$

State i, j = 0, 1, 2 ... dari rantai Markov $\{X_n, x \geq 0\}$ dapat diklasifikasikan sebagai jenis tersendiri berdasarkan beberapa aturan dasar dari sistem. Dengan demikian dapat dikenali tipe-tipe tertentu dari rantai. Berikut ini diberikan beberapa klasifikasi dari *state*.

Definisi 2.1.11 (Goodman, 1988). *State i dan j dikatakan communicate jika state j dapat dicapai dari state i dan sebaliknya, yang dinotasikan dengan* $i \longleftrightarrow j$.

Definisi 2.1.12 (Goodman, 1988). *Suatu rantai Markov dikatakan irreducible jika setiap state yang ada dalam rantai Markov tersebut communicate dengan state yang lain.*

Goodman (1988) mengatakan bahwa untuk masing-masing *state i*, diberikan $C(i) = \{semua\ state\ j\ sedemikian\ sehingga\ i \longleftrightarrow j\}$. *C (i)* disebut kelas dari *state* i .Suatu *state* i dikatakan *absorbing* jika $p_{ii} = 1$, akibatnya $p_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$. *State* seperti ini tidak *communicate* dengan *state* yang lain. Kelas *C* dikatakan *ergodic* jika setiap *path* yang dimulai di *C* tetap di *C*, yaitu

$$\sum_{j \in C} p_{ij} = 1$$

untuk setiap $i \in C$. *State* individual dalam kelas *ergodic* disebut *state ergodic*. Kelas *C* dikatakan *transient* jika terdapat *path* yang keluar dari *C*, maka

$$\sum_{j \in C} p_{ij} < 1$$

untuk setiap $i \in C$. *State* individual dalam kelas *transient* disebut *state transient*.

2.1.4 Distribusi Multinomial

Menurut Bain dan Engelhardt (1992), misalkan suatu percobaan menghasilkan k hasil dengan probabilitas $p_1, p_2, \ldots, p_k$, sedangkan $X_1, X_2, \ldots, X_k$ menunjukkan hasil dari kejadian $E_1, E_2, \ldots, E_k$ yang terjadi masing-masing $x_1, x_2, \ldots, x_k$ kali dalam n percobaan. Fungsi kepadatan probabilitas untuk distribusi ini diberikan

$$f(x_1, x_2, ..., x_k; p_1, p_2, ..., p_k; n) = \binom{n}{x_1\, x_2 \dots x_k} p_1^{x_1}\, p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$$

dengan $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$, $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ dan $\binom{n}{x_1\, x_2 \dots x_k} = \dfrac{n}{x_1!\, x_2! \dots x_k!}$ cara.

Distribusi ini disebut distribusi multinomial.

2.1.5 Estimasi Maksimum Likelihood

Menurut Bain dan Engelhardt (1992), estimasi maksimum likelihood menggunakan nilai dalam ruang parameter yang bersesuaian dengan harga kemungkinan terbesar dari data pengamatan sebagai estimasi dari parameter yang tidak diketahui, namun sebelumnya akan diberikan definisi dari estimator dan fungsi likelihood.

Definisi 2.1.13 (Bain dan Engelhardt, 1992). *Statistik* $T = l(x_1, x_2, ..., x_n)$ *yang digunakan untuk menduga* $\tau(\theta)$ *disebut estimator (penduga) dari* $\tau(\theta)$ *dan harga yang diobservasi dari statistik* $T = l(x_1, x_2, ..., x_n)$ *disebut estimasi dari* $\tau(\theta)$

Definisi 2.1.14 (Bain dan Engelhardt, 1992). *Fungsi densitas bersama dari n variabel random* $X_1, X_2, ..., X_n$ *yang dievaluasi pada* $x_1, x_2, ..., x_n$, *yaitu* $f(x_1, x_2, ..., x_n; \theta)$ *didefinisikan sebagai fungsi likelihood. Untuk* $x_1, x_2, ..., x_n$ *tetap, fungsi likelihood adalah fungsi dari* θ *dan sering dinotasikan dengan* $L(\theta)$. *Jika* $X_1, X_2, ..., X_n$ *mewakili sampel random dari* $f(x;\theta)$, *maka*

$$L(\theta) = f(x_1;\theta)\, f(x_2;\theta) \dots f(x_n;\theta) .$$

Definisi 2.1.15 (Bain dan Engelhardt, 1992). *Misal* $L(\theta) = f(x_1, x_2, ..., x_n; \theta)$, $\theta \in \Omega$ *adalah fungsi densitas probabilitas bersama dari* $X_1, X_2, ..., X_n$. *Untuk himpunan observasi* $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *yang diberikan, harga* $\hat{\theta} \in \Omega$ *dengan* $L(\theta)$

maksimum disebut sebagai estimasi maksimum likelihood dari θ. *Dengan kata lain, jika* $\hat{\theta}$ *adalah estimasi maksimum likelihood dari* θ, *maka*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n; \hat{\theta}) = \underset{\theta \in \Omega}{\text{maksimum}}\ f(x_1, x_2, ..., x_n; \theta)\ ,\ \text{untuk}\, \theta \in \Omega\,.$$

2.1.6 Metode Pengali Lagrange

Menurut Soemartojo (1987) pada umumnya nilai-nilai maksimum relatif atau minimum relatif dari fungsi $f(x,y)$ yang dipengaruhi oleh kendala $\phi(x,y)=0$ yang direpresentasikan

$$F(x,y) = f(x,y) + \lambda\phi(x,y)$$

dihitung dengan syarat

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0.$$

Selanjutnya parameter λ yang tidak bergantung pada x dan y disebut sebagai pengali Lagrange.

2.1.7 Metode Newton Raphson

Menurut May (1998), metode Newton Raphson didasarkan pada deret Taylor fungsi non linier pada titik yang dinyatakan sebagai

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \frac{f^3(x_0)(x - x_0)^3}{3!} + \ldots$$

Apabila diketahui fungsi $f(x)$ mempunyai titik awal x_0, maka dapat dicari harga x yang menyebabkan $f(x) = 0$ atau akar dari $f(x)$. Andaikan akar $f(x)$ tersebut adalah b dan deret Taylor dipotong sampai suku kedua, didapatkan persamaan

$$f(b) = f(x_0) + f'(x_0)(b - x_0)$$

maka

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(b - x_0)$$

sehingga didapat

$$b = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Karena nilai b ini belum memenuhi maka dicari dengan cara

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Iterasi ini terus berlanjut sehingga akan diperoleh barisan $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$. Andaikan ditentukan suatu nilai toleransi ε terlebih dulu, maka iterasi dihentikan jika

$$\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| < \varepsilon.$$

2.1.8 Metode Newton Raphson Untuk Vektor

Mengacu pada Roswitha (1995) jika diketahui fungsi $f(x)$ diganti dengan

$$F(\tilde{z}) = F(x,y) \qquad \text{dan} \qquad \nabla F(\tilde{z}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix},$$

maka permasalahannya adalah mencari akar dari $\nabla F(\tilde{z})$ yaitu $\tilde{b}$ sedemikian sehingga $\dfrac{\partial F(\tilde{b})}{\partial x} = 0$ dan $\dfrac{\partial F(\tilde{b})}{\partial y} = 0$

Jika diambil nilai awal $\tilde{z} = (\tilde{x}, \tilde{y})$, maka penderetan Taylor atas $\nabla F(\tilde{z})$ disekitar $\tilde{z} = (\tilde{x}, \tilde{y})$ berbentuk

$$\frac{\partial F(\tilde{z})}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{z}) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)(x - \tilde{x}) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)(y - \tilde{y}) + ...$$

$$\frac{\partial F(\tilde{z})}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{z}) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(x - \tilde{x}) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(y - \tilde{y}) + ...$$

ruas kiri sama dengan nol sehingga

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \tilde{x} \\ y - \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial F}{\partial x}(\tilde{z}) \\ -\dfrac{\partial F}{\partial y}(\tilde{z}) \end{bmatrix}.$$

2.1.8 Uji Hipotesis

Pengamatan dengan suatu fenomena dengan tujuan untuk melihat apakah suatu pernyataan tentang parameter suatu populasi bisa diterima atau ditolak disebut uji hipotesis. Struktur pengujian hipotesis dirumuskan dengan istilah hipotesis nol (dinotasikan dengan H_0). Penolakan hipotesis nol menjurus pada penerimaan hipotesis tandingan (dinotasikan dengan H_1). Berikut ini diberikan definisi-definisi tentang uji hipotesis menurut Bain dan Engelhardt (1992).

Definisi 2.1.16. *Uji hipotesis adalah prosedur yang memungkinkan untuk menerima atau menolak hipotesis nol.*

Definisi 2.1.17. *Tingkat signifikansi dari uji hipotesis dinotasikan α dengan adalah probabilitas untuk menolak hipotesis nol.*

Definisi 2.1.18. *Daerah kritis adalah himpunan dari ruang sampel yang berhubungan dengan penolakan hipotesis nol.*

Menurut Medhi (1983) misal akan dilakukan uji untuk kesesuaian antara matriks probabilitas transisi pada model yang terdefinisi dengan data terobservasi maka hipotesis nolnya adalah

$$H_0 : P = P^0$$

dan hipotesis tandingannya adalah

$$H_1 : P \neq P^0 .$$

Kemudian, untuk N besar dan $\hat{p}_{ij} = \dfrac{n_{ij}}{\sum_{j=1}^{s} n_{ij}} = \dfrac{n_{ij}}{n_i}$, didefinisikan suatu statistik

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{n_i(\hat{p}_{ij} - p_{ij}^0)^2}{p_{ij}^0}, \quad i = 1, 2, \ldots, s \tag{2.1.2}$$

berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas $s-1$. Nilai p_{ij}^0 yang sama dengan nol dikeluarkan dan derajat bebas dikurangkan dengan jumlah p_{ij}^0 yang sama dengan nol, sehingga uji untuk semua $\hat{p}_{ij}$ dapat diperoleh dengan menjumlahkan persamaan (2.1.2) di sepanjang nilai i, dan statistik

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} \frac{n_i(\hat{p}_{ij} - p_{ij}^0)^2}{p_{ij}^0}$$

berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas $(s-1)$.

Statistik uji rasio likelihood diberikan dengan

$$\gamma = \prod_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{s} \left(\frac{\hat{p}_{ij}}{p_{ij}^0} \right)^{n_{ij}}$$

dengan demikian, statistik uji

$$-2 \log \gamma = -2 \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} n_{ij} \log \left(\frac{\hat{p}_{ij}}{p_{ij}^0} \right)$$

berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas $s(s-1)$ dan H_0 ditolak jika $-2 \log \gamma$ lebih dari $x^2_{\alpha;s(s-1)}$.

2.1.10 Klasifikasi Pekerja yang Tidak Berketrampilan

Mengacu pada Sampson (1990) bahwa salah satu asumsi yang harus dipenuhi adalah objek dalam model rantai Markov ini haruslah para pekerja yang tidak berketrampilan, karena dengan tidak berketrampilan maka diantara mereka tidak ada karakteristik yang dapat membedakan antara satu dengan yang lainnya, sehingga mereka mempunyai probabilitas perpindahan yang sama.

The EIRO National Centre (2005) memberikan klasifikasi bagaimana seorang pekerja dianggap tidak berketrampilan. Pekerja yang tidak berketrampilan bukan hanya mereka yang bekerja pada suatu pekerjaan sedangkan mereka tidak mempunyai ketrampilan satupun namun juga mereka yang mempunyai ketrampilan namun ketrampilan yang mereka miliki tidak sesuai dengan bidang pekerjaan yang mereka jalani. Jadi secara umum pekerja yang tidak berketrampilan diartikan sebagai seseorang yang karakteristiknya paling rendah dari karakteristik yang diharapkan oleh suatu bidang pekerjaan.

2.2 Kerangka Pemikiran

Berdasarkan tinjauan pustaka, dapat disusun suatu kerangka pemikiran yang mendasari penulisan skripsi ini. Permasalahan yang akan dibahas adalah bagaimana menentukan estimasi probabilitas transisi pada model rantai Markov untuk pekerja yang tidak berketrampilan dengan menggunakan metode maksimum likelihood. Fungsi probabilitas transisi dari model rantai Markov untuk pekerja yang tidak berketrampilan diubah menjadi fungsi likelihood. Fungsi likelihood tersebut kemudian diubah menjadi fungsi ln-likelihood, berikutnya memaksimumkan fungsi ln-likelihood untuk memperoleh estimasi probabilitas transisi dari model rantai Markov untuk pekerja yang tidak berketrampilan.

BAB III

METODE PENULISAN

Metode yang digunakan pada penulisan skripsi ini adalah pengkajian secara teoritis dengan mengacu pada beberapa pustaka. Selain itu juga menyajikan suatu contoh untuk mengetahui gambaran dinamika pekerja yang tidak berketrampilan di masyarakat.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penyelesaian skripsi ini adalah

1. menganalisis model rantai Markov untuk pekerja yang tidak berketrampilan
2. menentukan estimasi probabilitas transisi *unrestricted* maksimum likelihood ($\hat{p}_{ij}$)
3. menentukan matriks estimasi probabilitas transisi *unrestricted* maksimum likelihood ($\hat{Q}_U$) dengan $\hat{p}_{ij}$ sebagai elemen-elemennya
4. menentukan matriks estimasi probabilitas ($\hat{\theta}$) yaitu dengan menyelesaikan persamaan $F_i(\theta)=\hat{\theta}_i+\dfrac{(1-\hat{\theta}_i)(\bar{p}-\bar{p}\hat{\theta}_i)}{n\bar{p}(1-\hat{\theta})1}-\dfrac{n_{ii}}{n_i}=0$
5. menentukan matriks estimasi probabilitas ($\hat{p}$) yaitu memasukkan nilai-nilai $\hat{\theta}$ ke dalam persamaan $\hat{p}_i^* = 1-(1-\dfrac{n_{ii}}{n_i})/(1-\hat{\theta}_i)$.
6. menentukan matriks estimasi probabilitas transisi *restricted* maksimum likelihood ($\hat{Q}_R$) dengan memasukkan $\hat{\theta}$ dan $\hat{p}$ ke dalam persamaan $\hat{Q}_R = \hat{\theta} + (1-\hat{\theta})1\hat{p}^*$.
7. menerapkan hasil yang diperoleh pada contoh kasus.

BAB IV
PEMBAHASAN

Salah satu kejadian di masyarakat yang dapat dimodelkan sebagai model rantai Markov adalah perpindahan pekerja yang tidak berketrampilan dari satu bidang pekerjaan ke bidang pekerjaan lain. Kasus ini memenuhi dua aturan penting dalam proses Markov. Pertama, aturan *memoryless,* yaitu penentuan bidang pekerjaan yang akan ditempati oleh pekerja yang tidak berketrampilan hanya dipengaruhi oleh bidang pekerjaannya pada saat itu, sedangkan bidang pekerjaan yang pernah dilalui tidak mempunyai pengaruh. Kedua, aturan waktu homogen, dengan mengasumsikan bidang pekerjaan sebagai *state:* pada setiap *state*, selama sistem berlangsung probabilitas transisi dari *state* i ke *state* j homogen (Sampson, 1990).

4.1 Model Rantai Markov untuk Pekerja yang Tidak Berketrampilan

Diberikan rantai Markov diskrit dengan ruang *state* berhingga, $Q = \lfloor p_{ij} \rfloor$ adalah matriks berukuran $s \times s$, dengan p_{ij} adalah probabilitas bahwa sistem berada di *state* j pada periode waktu t dengan syarat pada periode waktu $(t\text{-}1)$ berada di *state* i. Misalkan $\boldsymbol{1}$ adalah vektor satuan berukuran $s \times 1$, $p^* = \lfloor p_j^* \rfloor$ adalah vektor probabilitas berukuran $1 \times s$ jika hanya jika $p^* \boldsymbol{1} = 1$, $\theta = diagonal[\theta_i]$, adalah matriks diagonal berukuran $s \times s$ dengan $0 \le \theta_i \le 1$. Matriks probabilitas transisinya diberikan sebagai berikut

$$Q = \theta + (I - \theta)\boldsymbol{1}p^* \tag{4.1.1}$$

dengan $\boldsymbol{I}$ adalah matriks identitas. Probabilitas transisi dari *state* i ke *state* j dapat ditentukan dengan menguraikan matriks probabilitas transisi pada persamaan (4.1.1) yaitu

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{s1} & p_{s2} & \cdots & p_{s3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \theta_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \theta_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-\theta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-\theta_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-\theta_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^* & p_2^* & \cdots & p_s^* \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \theta_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \theta_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-\theta_1 \\ 1-\theta_2 \\ \cdots \\ 1-\theta_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^* & p_2^* & \cdots & p_s^* \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \theta_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \theta_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-\theta_1)p_1^* & (1-\theta_1)p_2^* & \cdots & (1-\theta_1)p_s^* \\ (1-\theta_2)p_1^* & (1-\theta_2)p_2^* & \cdots & (1-\theta_2)p_s^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (1-\theta_s)p_1^* & (1-\theta_s)p_2^* & \cdots & (1-\theta_s)p_s^* \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \theta_1+(1-\theta_1)p_1^* & (1-\theta_1)p_2^* & \cdots & (1-\theta_1)p_s^* \\ (1-\theta_2)p_1^* & \theta_2+(1-\theta_2)p_2^* & \cdots & (1-\theta_2)p_s^* \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (1-\theta_s)p_1^* & (1-\theta_s)p_2^* & \cdots & \theta_s+(1-\theta_s)p_s^* \end{bmatrix}. \quad (4.1.2)$$

Ditentukan suatu konstanta yaitu $\delta_{ii}=1$ dan $\delta_{ij}=0$ untuk $i \neq j$, maka untuk $i=j=1,2,...,s$ probabilitas transisi dari *state* i ke *state* j pada persamaan (4.1.2) dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$p_{ij} = \theta_i \delta_{ij} + (1-\theta_i)p_j^* \quad (4.1.3)$$

kemudian δ_{ij} disebut delta *Kronecker* (Sampson, 1990).

Terjadinya probabilitas transisi pada persamaan (4.1.1) dan (4.1.3) dapat dijelaskan sebagai berikut: asumsi yang harus dipenuhi adalah setiap pekerja yang menempati *state-state* dalam proses ini adalah pekerja yang tidak berketrampilan. Pekerja yang berada di *state* i (bidang pekerjaan i), mempunyai probabilitas sebesar θ_i untuk bertahan pada bidang pekerjaan i dan meninggalkannya dengan probabilitas $(1-\theta_i)$. Karena tidak berketrampilan maka bidang pekerjaan terdahulu tidaklah mempunyai peranan dalam penentuan bidang pekerjaan selanjutnya, sedangkan probabilitas seorang pekerja dapat diterima di *state* j setelah meninggalkan *state* i adalah p_j^*. Probabilitas transisi dari *state* i ke *state* j

dengan satu langkah adalah probabilitas keluar dari *state* i dan probabilitas berada di *state* j sebagai *state* berikutnya.

Jika θ_i identik untuk semua i maka terdapat kelas *state ergodic* (positif berulang dalam proses Markov tersebut. Jika nilainya sama dengan nol maka menunjukkan adanya independensi diantara *state* atau nilai parameter θ_i menentukan besar kecilnya pengaruh *state* i terhadap penentuan *state* sistem pada periode berikutnya. Jika $\theta_i = 0$, artinya *state* i tidak berpengaruh dalam penentuan *state* j. Sedangkan jika $\theta_i = 1$ maka $p_{ii} = 1$ artinya obyek yang telah mencapai *state* i tidak dapat berpindah ke *state* lain. *State* i kemudian disebut *state absorbing*. Ini berarti diketahui bahwa nilai p_{ij} dipengaruhi oleh nilai-nilai θ_i dan p_j^*. Inti dari permasalahan ini adalah menentukan estimasi probabilitas transisi dari *state* i ke *state* j dengan terlebih dulu mengestimasikan θ_i dan p_j^*. Metode estimasi yang digunakan adalah metode estimasi maksimum likelihood.

4.2 Estimasi Maksimum Likelihood

Berdasarkan rantai Markov waktu homogen dengan ruang *state* $S = \{0, 1, 2, ..., s\}$ dan matriks probabilitas transisi $P = \lfloor p_{ij} \rfloor$, untuk $i, j = 1, 2, ..., s$, misalkan jumlah transisi langsung terobservasi dari *state* i ke *state* j adalah n_{ij} dengan $\sum_{j=1}^{s} n_{ij} = n_i$, $\sum_{i=1}^{s} n_{ij} = \tilde{n}_j$, $\sum_{i=1}^{s} n_i = \sum_{j=1}^{s} \tilde{n}_j = N$ dan $\sum_{j=1}^{s} p_{ij} = 1$.

Medhi (1983) mengatakan bahwa terdapat kemiripan pada kasus ini dengan himpunan sampel dari percobaan multinomial. Dari N buah observasi, sejumlah n_{ij} transisi dari *state* i ke *state* j dan probabilitas transisi dari *state* i ke *state* j sebesar p_{ij}. Diberikan matriks probabilitas transisi dari *state* i ke *state* j dan matriks jumlah transisi dari *state* i ke *state* j sebagai berikut:

$$p_{ij} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{s1} & p_{s2} & \cdots & p_{ss} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad n_{ij} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1s} \\ n_{21} & n_{22} & \cdots & n_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n_{s1} & n_{s2} & \cdots & n_{ss} \end{bmatrix}.$$

Untuk objek yang berada di *state 1* sebagai *state* awalnya, dari matriks di atas, dapat diketahui bahwa dengan probabilitas sebesar p_{11} sejumlah n_{11} objek bertahan di *state 1*, kemudian dengan probabilitas sebesar p_{12} sejumlah n_{12} objek berpindah ke *state 2*. Hal yang sama terjadi sampai dengan *state s*, sehingga untuk $j = 1, 2, \ldots, s$ probabilitas transisi dari *state 1* ke *j* dapat diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P[X_{n+1} = j \backslash X_n = 1] &= \frac{n_1!}{n_{11}!\, n_{12}! \ldots n_{1s}!} p_{11}^{n_{11}} p_{12}^{n_{12}} \ldots p_{1s}^{n_{1s}} \\ &= \frac{n_1!}{\prod_{j=1}^{s} n_{1j}!} \prod_{j=1}^{s} p_{1j}^{n_{1j}} . \end{aligned}$$

Selanjutnya untuk objek yang berada di *state 2* sebagai *state* awalnya, dengan probabilitas sebesar p_{22} sejumlah n_{22} objek bertahan di *state 2*, kemudian dengan probabilitas sebesar p_{21} sejumlah n_{21} objek berpindah ke *state 2*. Hal yang sama terjadi sampai dengan *state s*, sehingga untuk $j = 1, 2, \ldots, s$ probabilitas transisi dari *state 2* ke *j* dapat diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} P[X_{n+1} = j \backslash X_n = 2] &= \frac{n_2!}{n_{21}!\, n_{22}! \ldots n_{2s}!} p_{21}^{n_{21}} p_{22}^{n_{22}} \ldots p_{2s}^{n_{2s}} \\ &= \frac{n_2!}{\prod_{j=1}^{s} n_{2j}!} \prod_{j=1}^{s} p_{2j}^{n_{2j}} . \end{aligned}$$

Analog untuk objek yang berada *state 3* sampai dengan *state s* sebagai *state* awalnya. Probabilitas transisi dari *state s* ke *state j* dengan $j = 1, 2, \ldots, s$ diberikan sebagai berikut:

$$P[X_{n+1}=j \backslash X_n = s] = \frac{n_s!}{n_{s1}!n_{s2}!\ldots n_{ss}!} p_{s1}^{n_{s1}} p_{s2}^{n_{s2}} \ldots p_{ss}^{n_{ss}}$$

$$= \frac{n_s!}{\prod_{j=1}^{s} n_{sj}!} \prod_{j=1}^{s} p_{sj}^{n_{sj}} .$$

Probabilitas transisi dari setiap *state i* ke *state j* adalah perkalian dari probabilitas transisi dari *state 1* ke *j*, probabilitas transisi dari *state 2* ke *j*, sampai dengan probabilitas transisi dari *state s* ke *j*. Untuk $i = j = 1, 2, \ldots, s$, probabilitas transisi dari setiap *state i* ke *state j* diberikan sebagai berikut:

$$P[X_{n+1}=j \backslash X_n = i] = P[X_{n+1}=j \backslash X_n = 1] \,.\, P[X_{n+1}=j \backslash X_n = 2] \ldots P[X_{n+1}=j \backslash X_n = s]$$

$$= \frac{n_1!}{\prod_{j=1}^{s} n_{1j}!} \prod_{j=1}^{s} p_{1j}^{n_{1j}} \; \frac{n_2!}{\prod_{j=1}^{s} n_{2j}!} \prod_{j=1}^{s} p_{2j}^{n_{2j}} \cdots \frac{n_s!}{\prod_{j=1}^{s} n_{sj}!} \prod_{j=1}^{s} p_{sj}^{n_{sj}}$$

$$= \prod_{i=1}^{s} \left[\frac{n_i!}{\prod_{j=1}^{s} n_{ij}!} \prod_{j=1}^{s} p_{ij}^{n_{ij}} \right]$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{s} n_i!}{\prod_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{s} n_{ij}!} \prod_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{s} p_{ij}^{n_{ij}} .$$

Fungsi likelihood yang dinotasikan dengan l_U dapat ditentukan dari persamaan di atas yaitu

$$l_U = \frac{\prod_{i=1}^{s} (n_i)!}{\prod_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{s} (n_{ij})!} \prod_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{s} p_{ij}^{n_{ij}} \quad . \qquad (4.2.1)$$

Logaritma dari fungsi likelihood pada persamaan (4.2.1) adalah

$$\ln l_U = \ln\left[\frac{\prod_{i=1}^{s}(n_i)!}{\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{s}(n_{ij})!}\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{s}p_{ij}^{\,n_{ij}}\right]$$

$$= \ln\frac{\prod_{i=1}^{s}(n_i)!}{\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{s}(n_{ij})!} + \ln\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{s}p_{ij}^{\,n_{ij}}\,. \tag{4.2.2}$$

Suku pertama dari ruas kanan persamaan (4.2.2) tidak bergantung terhadap p_{ij} ,jika dimisalkan suatu konstanta C yaitu $C = \ln\dfrac{\prod_{i=1}^{s}(n_i)!}{\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{s}(n_{ij})!}$ maka persamaan (4.2.2) berubah menjadi

$$\ln l_U = C + \ln p_{ij}^{\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}n_{ij}}$$

$$= C + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}n_{ij}.\ln p_{ij} \tag{4.2.3}$$

Telah diketahui bahwa $\sum_{j=1}^{s}p_{ij}=1$, akibatnya persamaan (4.2.3) dapat ditulis ulang menjadi

$$\ln l_U = C + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s-1}n_{ij}\ln p_{ij} + \sum_{i=1}^{s}n_{is}\ln p_{is}$$

$$= C + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s-1}n_{ij}\ln p_{ij} + \sum_{i=1}^{s}n_{is}\ln\left(1-\sum_{j=1}^{s-1}p_{ij}\right). \tag{4.2.4}$$

Diberikan nilai $i=a$, persamaan (4.2.4) menjadi

$$\ln l_U = C + \sum_{j=1}^{s-1}n_{aj}\ln p_{aj} + n_{as}\ln\left(1-\sum_{j=1}^{s-1}p_{aj}\right). \tag{4.2.5}$$

Estimasi maksimum likelihood untuk p_{aj} $(\hat{p}_{aj})$ diberikan dengan terlebih dulu menurunkan persamaan (4.2.5) yaitu

$$\frac{\partial \ln l_U}{\partial \hat{p}_{aj}} = \frac{\partial \left(C + \sum_{j=1}^{s-1} n_{aj} \ln p_{aj} + n_{as} \ln\left(1 - \sum_{j=1}^{s-1} p_{aj}\right)\right)}{\partial \hat{p}_{aj}}$$

$$= \frac{\partial (C)}{\partial \hat{p}_{aj}} + \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^{s-1} n_{aj} \ln p_{aj} \right)}{\partial \hat{p}_{aj}} + \frac{\partial \left(n_{as} \ln\left(1 - \sum_{j=1}^{s-1} p_{aj}\right)\right)}{\partial \hat{p}_{aj}}$$

$$= 0 + \frac{n_{aj}}{\hat{p}_{aj}} - \frac{n_{as}}{1 - \sum_{j=1}^{s-1} p_{aj}}$$

$$= \frac{n_{aj}}{\hat{p}_{aj}} - \frac{n_{as}}{1 - \sum_{j=1}^{s-1} p_{aj}}, \qquad (4.2.6)$$

untuk setiap $j = 1, 2, ..., s$, kemudian meminimumkan persamaan (4.2.6) sebagai berikut:

$$\frac{\partial \ln l_U}{\partial \hat{p}_{aj}} = 0 \Leftrightarrow \frac{n_{aj}}{\hat{p}_{aj}} - \frac{n_{as}}{1 - \sum_{j=1}^{s-1} p_{aj}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{n_{aj}}{\hat{p}_{aj}} = \frac{n_{as}}{1 - \sum_{j=1}^{s-1} p_{aj}}, \qquad (4.2.7)$$

untuk $j = 1, 2, ..., s$. Kemudian ditentukan nilai $j = b$, sehingga persamaan (4.2.7) menjadi

$$\frac{n_{ab}}{\hat{p}_{ab}} = \frac{n_{aj}}{\hat{p}_{aj}} = \frac{n_{as}}{1 - \sum_{j=1}^{s-1} p_{aj}}, \qquad (4.2.8)$$

untuk $j = 1, 2, ..., b, ..., s$. Persamaan (4.2.8) dapat dipecah menjadi dua persamaan yaitu

$$\frac{n_{ab}}{\hat{p}_{ab}} = \frac{n_{as}}{1 - \sum_{j=1}^{s-1} p_{aj}} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \sum_{j=1}^{s-1} p_{aj} = \frac{n_{as}}{n_{ab}} \hat{p}_{ab} \qquad (4.2.9a)$$

dan

$$\frac{n_{ab}}{\hat{p}_{ab}} = \frac{n_{aj}}{\hat{p}_{aj}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \hat{p}_{aj} = \frac{n_{aj}}{n_{ab}}\hat{p}_{ab} \qquad (4.2.9b)$$

untuk $j = 1, 2, ..., b, ..., s$. Selanjutnya, persamaan (4.2.9b) dijumlahkan untuk semua nilai j dan ditambahkan persamaan (4.2.9a) sebagai berikut:

$$\sum_{j=1}^{s-1} \hat{p}_{aj} + 1 - \sum_{j=1}^{s-1} \hat{p}_{aj} = \sum_{j=1}^{s-1} \frac{n_{aj}}{n_{ab}} \hat{p}_{ab} + \frac{n_{as}}{n_{ab}} \hat{p}_{ab}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{\hat{p}_{ab}}{n_{ab}} \left(\sum_{j=1}^{s-1} n_{aj} + n_{as} \right)$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{\hat{p}_{ab}}{n_{ab}} \left(\sum_{j=1}^{s} n_{aj} \right)$$

$$\Leftrightarrow \hat{p}_{ab} = \frac{n_{ab}}{\sum_{j=1}^{s} n_{aj}}.$$

Sebelumnya telah ditentukan a dan b sebagai nilai-nilai dari i dan j dengan $i = 1, 2, ..., a, ..., s$ dan $j = 1, 2, ..., b, ..., s$ sehingga

$$\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sum_{j=1}^{s} n_{ij}} = \frac{n_{ij}}{n_i} \qquad (4.2.10)$$

adalah estimasi probabilitas transisi maksimum likelihood untuk p_{ij}.

Dikatakan oleh Sampson (1990) bahwa $\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i}$ adalah elemen–elemen dari matriks estimasi probabilitas transisi maksimum likelihood *unrestricted* yang dinotasikan dengan $\hat{Q}_U$ atau dapat ditulis $\hat{Q}_U = [\hat{p}_{ij}]$. Diberikan $n_i = \sum_{j=1}^{s} n_{ij}$ adalah jumlah transisi dari *state* i ke setiap *state* yang diketahui, $\tilde{n}_i = \sum_{i=1}^{s} n_{ij}$ adalah jumlah transisi yang menuju ke *state* j dari setiap *state* yang diketahui dan $\sum_{i=1}^{s} n_i = \sum_{i=1}^{s} \tilde{n}_i = n$. Jika ditentukan suatu vektor probabilitas berukuran $1 \times s$ yaitu $\bar{p} = \left[\frac{n_i}{n}\right]$ dan $\tilde{p} = \left[\frac{\tilde{n}_i}{n}\right]$ maka

$$\bar{p}\hat{Q}_U = \begin{bmatrix} \frac{n_1}{n} & \frac{n_2}{n} & \cdots & \frac{n_s}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{n_{11}}{n_1} & \frac{n_{12}}{n_1} & \cdots & \frac{n_{1s}}{n_1} \\ \frac{n_{21}}{n_2} & \frac{n_{22}}{n_2} & \cdots & \frac{n_{2s}}{n_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{n_{s1}}{n_s} & \frac{n_{s2}}{n_s} & \cdots & \frac{n_{ss}}{n_s} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{n_{11}}{n} + \frac{n_{21}}{n} + \ldots \frac{n_{s1}}{n} & \frac{n_{12}}{n} + \frac{n_{22}}{n} + \ldots \frac{n_{s2}}{n} & \cdots & \frac{n_{1s}}{n} + \frac{n_{2s}}{n} + \ldots \frac{n_{ss}}{n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{s} \frac{n_{i1}}{n} & \sum_{i=1}^{s} \frac{n_{i2}}{n} & \cdots & \sum_{i=1}^{s} \frac{n_{is}}{n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\tilde{n}_1}{n} & \frac{\tilde{n}_2}{n} & \cdots & \frac{\tilde{n}_s}{n} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{\tilde{n}_i}{n}\right], \qquad \text{dengan } i = 1, 2, \ldots, s$$

$$= \tilde{p}. \tag{4.2.11}$$

Persamaan likelihood *restricted* diperoleh dengan mensubtitusikan persamaan (4.1.3) ke persamaan (4.2.3) dan diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$ln\, l_R = \sum_{i=1}^{s} \left\{ n_{ii}\, ln(\theta_i + (1-\theta_i)p_i^*) + (\tilde{n}_i - n_{ii})\, ln(p_i^*) + (n_i - n_{ii})\, ln(1-\theta_i) \right\}, \tag{4.2.12}$$

(pembuktian terlampir). Didefinisikan fungsi tujuan dari permasalahan ini yaitu memaksimumkan $ln\, l_R$ dengan $p^* 1 = \sum_{i=1}^{s} p_i^* = 1$ sebagai fungsi kendala dan λ adalah konstanta pengali *Lagrange*. Fungsi *Lagrange* dari permasalahan ini adalah

$$L(\theta_i, p_i^*) = \sum_{i=1}^{s}\{n_{ii}\, ln(\theta_i + (1-\theta_i)p_i^*) + (\tilde{n}_i - n_{ii})ln(p_i^*) +$$

$$(n_i - n_{ii})ln(1-\theta_i)\} + \lambda(1-\sum_{i=1}^{s} p_i^*).$$

Syarat yang diperlukan untuk memaksimumkan fungsi Lagrange di atas adalah

- $\dfrac{\partial L(\hat{\theta}_i, \hat{p}_i^*)}{\partial \hat{\theta}_i} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{n_{ii}(1-\hat{p}_i^*)}{\hat{\theta}_i + (1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^*} - \frac{(n_i - n_{ii})}{(1-\hat{\theta}_i)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{n_{ii}(1-\hat{p}_i^*)}{\hat{\theta}_i + (1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^*} = \frac{(n_i - n_{ii})}{(1-\hat{\theta}_i)}, \qquad \text{dengan } i = 1,2,\ldots,s \qquad (4.2.13a)$$

- $\dfrac{\partial L(\hat{\theta}_i, \hat{p}_i^*)}{\partial \hat{p}_i^*} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{n_{ii}(1-\hat{\theta}_i)}{\hat{\theta}_i + (1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^*} + \frac{(\tilde{n}_i - n_{ii})}{\hat{p}_i^*} - \lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{n_{ii}(1-\hat{\theta}_i)}{\hat{\theta}_i + (1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^*} + \frac{(\tilde{n}_i - n_{ii})}{\hat{p}_i^*}, \qquad \text{dengan } i = 1,2,\ldots,s \qquad (4.2.13b)$$

- $\dfrac{\partial L(\hat{\theta}_i, \hat{p}_i^*)}{\partial \lambda} = 0$

$$\Leftrightarrow 1 - \sum_{i=1}^{s} p_i^* = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{s} p_i^* = 1. \qquad (4.2.13c)$$

Persamaan (4.2.13c) adalah pernyataan kembali fungsi kendala yang diberikan, hal ini menunjukkan bahwa nilai penyelesaian dari fungsi Lagrange pasti akan memenuhi kendala dari fungsi semula.

Matriks estimasi probabilitas transisi *restricted* diperoleh dengan menguraikan persamaan (4.2.12a) sebagai berikut:

$$\frac{n_{ii}(1-\hat{p}_i^*)}{\hat{\theta}_i+(1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^*} = \frac{(n_i-n_{ii})}{(1-\hat{\theta}_i)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-\hat{\theta}_i)(1-\hat{p}_i^*)}{\hat{\theta}_i+(1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^*} = \frac{(n_i-n_{ii})}{n_{ii}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-\hat{\theta}_i)-(1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^*}{\hat{\theta}_i+(1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^*} = \frac{n_i}{n_{ii}}-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-(\hat{\theta}_i+(1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^*)}{\hat{\theta}_i+(1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^*} = \frac{n_i}{n_{ii}}-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\hat{\theta}_i+(1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^*}-1 = \frac{n_i}{n_{ii}}-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\hat{\theta}_i+(1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^*} = \frac{n_i}{n_{ii}}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\theta}_i+(1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^* = \frac{n_{ii}}{n_i} = p_{ii}. \qquad (4.2.14)$$

Persamaan (4.2.14) menunjukkan elemen–elemen dari matriks estimasi probabilitas transisi maksimum likelihood *restricted*, $\hat{Q}_R = \hat{\theta} + (1-\hat{\theta})1\hat{p}^*$. Dari persamaan ini pula dapat dilihat bahwa matriks estimasi probabilitas transisi maksimum likelihood *restricted*, $\hat{Q}_R$ mempunyai elemen-elemen diagonal yang sama dengan estimasi matriks probabilitas transisi maksimum likelihood *unrestricted*, $\hat{Q}_U$. Lalu dikombinasikan persamaan (4.2.13a) dan (4.2.14) dengan syarat $\hat{p}^*1 = \sum_{i=1}^{s} p_i^* = 1$ untuk persamaan (4.2.13b) menghasilkan

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{n_{ii}(1-\hat{\theta}_i)}{\hat{\theta}_i+(1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^*}+\frac{(\tilde{n}_i-n_{ii})}{\hat{p}_i^*}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{n_{ii}(1-\hat{\theta}_i)}{\frac{n_{ii}}{n_i}}+\frac{(\tilde{n}_i-n_{ii})}{\hat{p}_i^*}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{n_i(1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^*+(\tilde{n}_i-n_{ii})}{\hat{p}_i^*}$$

dengan perkalian silang, maka

$$\hat{p}_i^* = \frac{n_i(1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^* + (\tilde{n}_i - n_{ii})}{\lambda}$$

Dari persamaan (4.2.14) diketahui bahwa $\hat{\theta}_i + (1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^* = \frac{n_{ii}}{n_i}$, maka

$$(1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^* = \frac{n_{ii}}{n_i} - \hat{\theta}_i,$$

sehingga

$$\Leftrightarrow \hat{p}_i^* = \frac{n_i(\frac{n_{ii}}{n_i} - \hat{\theta}_i) + (\tilde{n}_i - n_{ii})}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \hat{p}_i^* = \frac{n_{ii} - n_i\hat{\theta}_i + \tilde{n}_i - n_{ii}}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \hat{p}_i^* = \frac{\tilde{n}_i - n_i\hat{\theta}_i}{\lambda}.$$

Sekarang dilakukan penjumlahan terhadap $\hat{p}_i^*$ untuk $i = 1, 2, \dots, s$ yaitu

$$\sum_{i=1}^{s} \hat{p}_i^* = \sum_{i=1}^{s} \frac{\tilde{n}_i - n_i\hat{\theta}_i}{\lambda},$$

karena $\hat{p}^* 1 = \sum_{i=1}^{s} p_i^* = 1$, maka

$$1 = \frac{\sum_{i=1}^{s} \tilde{n}_i - n_i\hat{\theta}_i}{\lambda}$$

atau

$$\lambda = \sum_{i=1}^{s} \tilde{n}_i - \sum_{i=1}^{s} n_i\hat{\theta}_i.$$

Masing-masing ruas dari persamaan di atas dibagi dengan n dan diperoleh

$$\frac{\lambda}{n} = \frac{n - \sum_{i=1}^{s} n_i\hat{\theta}_i}{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda}{n} = 1 - \sum_{i=1}^{s} \overline{p}_i \hat{\theta}_i .$$

Dapat juga ditulis $\frac{\lambda}{n} = \overline{p}(I - \hat{\theta})1$, sehingga dengan memanfaatkan kombinasi ini dapat digunakan untuk menguraikan persamaan (4.2.13b) sebagai berikut:

$$\lambda = \frac{n_{ii}(1-\hat{\theta}_i)}{\hat{\theta}_i + (1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^*} + \frac{(\tilde{n}_i - n_{ii})}{\hat{p}_i^*}, \text{ dengan } i = 1,2,\ldots,s$$

$$\Leftrightarrow n\overline{p}(I-\hat{\theta})1 = \frac{n_{ii}(1-\hat{\theta}_i)}{\frac{n_{ii}}{n_i}} + \frac{(\tilde{n}_i - n_{ii})}{\hat{p}_i^*}$$

$$\Leftrightarrow n\overline{p}(I-\hat{\theta})1 = \frac{n_i(1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^*}{\hat{p}_i^*} + \frac{(\tilde{n}_i - n_{ii})}{\hat{p}_i^*}$$

$$\Leftrightarrow \overline{p}(I-\hat{\theta})1\hat{p}_i^* = \frac{n_i(1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^* + (\tilde{n}_i - n_{ii})}{n}$$

$$\Leftrightarrow \overline{p}(I-\hat{\theta})1\hat{p}_i^* = \overline{p}_i(1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^* + \tilde{p}_i - \hat{p}_{ii}\overline{p}_i$$

$$\Leftrightarrow \overline{p}(I-\hat{\theta})1\hat{p}_i^* = \overline{p}_i(1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^* + \tilde{p}_i - (\hat{\theta}_i + (1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^*)\overline{p}_i$$

$$\Leftrightarrow \overline{p}(I-\hat{\theta})1\hat{p}_i^* = \overline{p}_i(1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^* + \tilde{p}_i - \overline{p}_i\hat{\theta}_i - \overline{p}_i(1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^*$$

$$\Leftrightarrow \overline{p}(I-\hat{\theta})1\hat{p}_i^* = \tilde{p}_i - \overline{p}_i\hat{\theta}_i$$

maka

$$\tilde{p}_i = \overline{p}(I-\hat{\theta})1\hat{p}_i^* + \overline{p}_i\hat{\theta}_i .$$

Di lain pihak $\tilde{p}_i = \overline{p}(I-\hat{\theta})1\hat{p}_i^* + \overline{p}_i\hat{\theta}_i$ adalah elemen-elemen dari vektor probabilitas $\tilde{p}$ yaitu

$$\tilde{p} = \overline{p}(\hat{\theta} + (I-\hat{\theta})1\hat{p}^*) = \overline{p}\hat{Q}_R . \tag{4.2.15}$$

Demikian tampak bahwa $\hat{Q}_R$ dan $\hat{Q}_U$ keduanya merupakan properti untuk transformasi $\overline{p}$ ke $\tilde{p}$ (bandingkan persamaan (4.2.11) dan (4.2.15)).

Estimasi probabilitas transisi maksimum likelihood *restricted* diperoleh dengan menguraikan persamaan (4.2.13b) sebagai berikut:

$$\lambda = \frac{n_{ii}(1-\hat{\theta}_i)}{\hat{\theta}_i + (1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^*} + \frac{(\tilde{n}_i - n_{ii})}{\hat{p}_i^*}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{n_{ii}(1-\hat{\theta}_i)}{\frac{n_{ii}}{n_i}} + \frac{(\tilde{n}_i - n_{ii})}{\hat{p}_i^*}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{n_i(1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^*}{\hat{p}_i^*} + \frac{(\tilde{n}_i - n_{ii})}{\hat{p}_i^*}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{n_i(\hat{p}_{ii} - \hat{\theta}_i)}{\hat{p}_i^*} + \frac{(\tilde{n}_i - n_{ii})}{\hat{p}_i^*}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{n_i(\frac{n_{ii}}{n_i} - \hat{\theta}_i)}{\hat{p}_i^*} + \frac{(\tilde{n}_i - n_{ii})}{\hat{p}_i^*}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{(n_{ii} - n_i\hat{\theta}_i)}{\hat{p}_i^*} + \frac{(\tilde{n}_i - n_{ii})}{\hat{p}_i^*}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{(1-\hat{\theta}_i)(\tilde{n}_i - n_i\hat{\theta}_i)}{(1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^*}$$

$$\Leftrightarrow (1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^* = \frac{(1-\hat{\theta}_i)(\tilde{n}_i - n_i\hat{\theta}_i)}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow (1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^* = \frac{(1-\hat{\theta}_i)(\tilde{n}_i - n_i\hat{\theta}_i)}{n\overline{p}(1-\hat{\theta})1}. \tag{4.2.16}$$

Lalu dilakukan subtitusi persamaan (4.2.16) ke persamaan (4.2.14) sebagai berikut:

$$\hat{\theta}_i + (1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^* = \frac{n_{ii}}{n_i}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\theta}_i + \frac{(1-\hat{\theta}_i)(\tilde{n}_i - n_i\hat{\theta}_i)}{n\overline{p}(1-\hat{\theta})1} - \frac{n_{ii}}{n_i} = 0$$

$$\Leftrightarrow \hat{\theta}_i + \frac{(1-\hat{\theta}_i)(\tilde{p} - \overline{p}\hat{\theta}_i)}{n\overline{p}(1-\hat{\theta})1} - \frac{n_{ii}}{n_i} = 0, \tag{4.2.17}$$

Jika diberikan $F_i(\theta)=\hat{\theta}_i+\frac{(1-\hat{\theta}_i)(\tilde{p}-\bar{p}\hat{\theta}_i)}{n\bar{p}(1-\hat{\theta})1}-\frac{n_{ii}}{n_i}$, untuk $i=1,2,\ldots,s$, maka $\hat{\theta}$ adalah akar–akar dari $F_i(\theta)$ yang harus diselesaikan secara iteratif terhadap $\hat{\theta}$. Metode Newton memberikan bentuk sederhana untuk menyelesaikan persamaan ini yaitu

$$\hat{\theta}_{i(t)}=\hat{\theta}_{i(t-1)}-F_i a_i+\frac{a_i\sum_{k=1}^{s}\bar{p}_k F_k a_k b_k}{1+\sum_{k=1}^{s}\bar{p}_k a_k b_k}, \tag{4.2.18}$$

t menunjukkan iterasi yang dilalui, dengan $a_i(\theta)$ dan $b_i(\theta)$ adalah

$$a_i(\theta)=\left(\frac{1+(2\theta_i\bar{p}_i-\tilde{p}_i-\bar{p}_i)}{\bar{p}(1-\theta)1}\right)^{-1} \tag{4.2.19a}$$

$$b_i(\theta)=\frac{(1-\theta_i)(\tilde{p}_i-\bar{p}_i\theta_i)}{(\bar{p}(1-\theta)1)^2}. \tag{4.2.19b}$$

Setelah nilai $\hat{\theta}$ diperoleh maka $\hat{p}_i^*$ ditentukan dengan menyelesaikan persamaan (4.2.13a) sebagai berikut:

$$\frac{n_{ii}(1-\hat{p}_i^*)}{\hat{\theta}_i+(1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^*}=\frac{(n_i-n_{ii})}{(1-\hat{\theta}_i)}.$$

Telah diketahui bahwa $\hat{\theta}_i+(1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_i^*=\hat{p}_{ii}=\frac{n_{ii}}{n_i}$, dengan mensubtutusikan persamaan ini ke persamaan di atas diperoleh

$$\frac{n_{ii}(1-\hat{p}_i^*)}{\hat{p}_{ii}}=\frac{(n_i-n_{ii})}{(1-\hat{\theta}_i)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n_{ii}(1-\hat{p}_i^*)}{\frac{n_{ii}}{n_i}}=\frac{(n_i-n_{ii})}{(1-\hat{\theta}_i)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-\hat{p}_i^*)}{\frac{1}{n_i}}=\frac{(n_i-n_{ii})}{(1-\hat{\theta}_i)}$$

$$\Leftrightarrow (1-\hat{p}_i^*) = \frac{(n_i - n_{ii})}{n_i(1-\hat{\theta}_i)}$$

$$\Leftrightarrow (1-\hat{p}_i^*) = (1-\frac{n_{ii}}{n_i})/(1-\hat{\theta}_i)$$

$$\Leftrightarrow \quad \hat{p}_i^* = 1-(1-\frac{n_{ii}}{n_i})/(1-\hat{\theta}_i). \qquad (4.2.20)$$

Dari perolehan nilai $\hat{\theta}$ dan $\hat{p}_i^*$ maka matriks estimasi probabilitas transisi *restricted*, $\hat{Q}_R = \hat{\theta} + (I-\hat{\theta})1\hat{p}^*$ diperoleh dengan memasukkan perolehan nilai-nilai matriks $\hat{\theta}$ dan $\hat{p}_i^*$.

4.3 Contoh Kasus

Data yang digunakan pada subbab ini diambil dari *The Nation Longitudinal Survey of Young Men,* terdiri dari 1344 pekerja laki-laki yang berusia diantara 14 dan 24 tahun selama 6 tahun (1966-1971) (Sampson, 1990). Karena himpunan data terdiri dari pekerja laki-laki muda, maka sangat beralasan untuk mengasumsikan pekerja dalam sampel ini tidak berketrampilan dan dapat diterapkan model rantai Markov untuk data ini. *State-state* pada kasus ini diberikan sebagai berikut:

1. agrikultur, kehutanan, perikanan dan pertambangan
2. konstruksi bangunan
3. manufaktur
4. transportasi, komunikasi, dan pelayanan umum
5. perdagangan partai besar maupun eceran
6. keuangan, asuransi, real estate, bisnis pelayanan perbaikan, hiburan dan rekreasi
7. pelayanan hubungan dan profesional, administrasi umum.

Diperoleh data jumlah transisi dari satu *state* ke *state* yang lain. Matriks jumlah transisinya adalah

$$[n_{ij}] = \begin{bmatrix} 110 & 10 & 12 & 3 & 13 & 5 & 3 \\ 2 & 69 & 17 & 6 & 7 & 2 & 6 \\ 11 & 14 & 369 & 9 & 29 & 13 & 11 \\ 0 & 5 & 7 & 50 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 33 & 10 & 198 & 23 & 17 \\ 1 & 6 & 14 & 4 & 21 & 59 & 12 \\ 1 & 4 & 9 & 2 & 6 & 5 & 119 \end{bmatrix}.$$

4.3.1 Estimasi Probabilitas Transisi Maksimum Likelihood

Matriks estimasi probabilitas transisi maksimum likelihood untuk kasus ini terdiri dari dua komponen yaitu matriks estimasi probabilitas transisi maksimum likelihood *unrestricted* dan matriks estimasi probabilitas transisi maksimum likelihood *restricted*. Dari data yang dipunyai maka matriks estimasi probabilitas transisi maksimum likelihood *unrestricted* adalah

$$[\hat{Q}_U] = \begin{bmatrix} 0.705 & 0.064 & 0.077 & 0.019 & 0.083 & 0.032 & 0.019 \\ 0.018 & 0.633 & 0.156 & 0.055 & 0.064 & 0.018 & 0.055 \\ 0.024 & 0.031 & 0.809 & 0.020 & 0.064 & 0.029 & 0.024 \\ 0.000 & 0.072 & 0.101 & 0.725 & 0.073 & 0.015 & 0.015 \\ 0.007 & 0.028 & 0.113 & 0.034 & 0.680 & 0.079 & 0.058 \\ 0.009 & 0.051 & 0.120 & 0.034 & 0.180 & 0.504 & 0.103 \\ 0.007 & 0.027 & 0.062 & 0.014 & 0.041 & 0.034 & 0.815 \end{bmatrix},$$

dari matriks estimasi probabilitas transisi ini dapat ditentukan nilai *log-likelihood*nya yaitu

$$\begin{aligned} \ln l_U &= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} n_{ij}.\ln \hat{p}_{ij} \\ &= 110.\ln(0.705) + 10.\ln(0.064) + \ldots + 119.\ln(0.815) \\ &= -1350.31 \text{ (terlampir)} \end{aligned}$$

Matriks estimasi probabilitas transisi maksimum likelihood *restricted* diperoleh dengan terlebih dahulu menentukan vektor probabilitas berukuran $1 \times s$ yaitu $\overline{p} = \left[\frac{n_i}{n}\right]$ dan $\widetilde{p} = \left[\frac{\widetilde{n}_i}{n}\right]$ yaitu

$$\bar{p} = [0.116 \quad 0.081 \quad 0.339 \quad 0.051 \quad 0.217 \quad 0.087 \quad 0.109]$$

dan

$$\tilde{p} = [0.094 \quad 0.086 \quad 0.343 \quad 0.063 \quad 0.208 \quad 0.080 \quad 0.126]$$

kemudian menentukan fungsi $F_i(\theta) = \theta_i + \dfrac{(1-\theta_i)(\tilde{p}_i - \bar{p}_i\theta_i)}{\bar{p}(1-\theta)1} - \dfrac{n_{ii}}{n_i}$, dengan $i = 1,2,\ldots,7$ sebagai berikut:

$$F_1(\theta) = \theta_1 + \frac{(1-\theta_1)(0.094 - 0.116\theta_1)}{1 - \sum_{i=1}^{7} \bar{p}_i\theta_i} - 0.705$$

$$F_2(\theta) = \theta_2 + \frac{(1-\theta_2)(0.086 - 0.081\theta_2)}{1 - \sum_{i=1}^{7} \bar{p}_i\theta_i} - 0.633$$

$$F_3(\theta) = \theta_3 + \frac{(1-\theta_3)(0.343 - 0.339\theta_3)}{1 - \sum_{i=1}^{7} \bar{p}_i\theta_i} - 0.809$$

$$F_4(\theta) = \theta_4 + \frac{(1-\theta_4)(0.063 - 0.051\theta_4)}{1 - \sum_{i=1}^{7} \bar{p}_i\theta_i} - 0.725$$

$$F_5(\theta) = \theta_5 + \frac{(1-\theta_5)(0.208 - 0.217\theta_5)}{1 - \sum_{i=1}^{7} \bar{p}_i\theta_i} - 0.680$$

$$F_6(\theta) = \theta_6 + \frac{(1-\theta_6)(0.080 - 0.087\theta_6)}{1 - \sum_{i=1}^{7} \bar{p}_i\theta_i} - 0.504$$

$$F_7(\theta) = \theta_7 + \frac{(1-\theta_7)(0.126 - 0.109\theta_7)}{1 - \sum_{i=1}^{7} \bar{p}_i\theta_i} - 0.815$$

maka $\hat{\theta}$ adalah akar-akar dari $F_i(\theta)$ yang harus diselesaikan secara iteratif terhadap $\hat{\theta}$ dengan metode Newton Raphson sebagai berikut:

- Iterasi 1 ($t = 1$), maka

  diambil nilai awal $\hat{\theta}_{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$, berikut ini diberikan tabel penyelesaian akar dengan metode Newton-Raphson.

Tabel . 4. 1. Tabel Iterasi 1 dari Penyelesaian Akar

$\hat{\theta}_{i(0)}$	$F_i(\hat{\theta}_{i(0)})$	$a_i(\hat{\theta}_{i(0)})$	$b_i(\hat{\theta}_{i(0)})$	$\hat{\theta}_{i(1)}$
0	*-0,611*	*1,265823*	*0,094*	0,571423
0	*-0,547*	*1,20048*	*0,086*	0,465095
0	*-0,466*	*3,144654*	*0,343*	0,963599
0	*-0,662*	*1,128668*	*0,063*	0,56707
0	*-0,472*	*1,73913*	*0,208*	0,543347
0	*-0,424*	*1,20048*	*0,08*	0,317436
0	*-0,689*	*1,30719*	*0,126*	0,692058

Pada tabel . 4. 1 ini diperoleh akar dari $F_i(\theta)$ untuk $i=1,2,...,7$ adalah

$$\hat{\theta}_{(1)} = [0.571 \quad 0.465 \quad 0.964 \quad 0.567 \quad 0.543 \quad 0.317 \quad 0.692]$$

- Iterasi 2 (t = 2), maka

$\hat{\theta}_{(1)} = [0.571 \quad 0.465 \quad 0.964 \quad 0.567 \quad 0.543 \quad 0.317 \quad 0.692]$ adalah nilai awal untuk iterasi 2, berikut ini diberikan tabel penyelesaian akar dengan metode Newton-Raphson.

Tabel. 4. 2. Tabel Iterasi 2 dari Penyelesaian Akar

$\hat{\theta}_{i(1)}$	$F_i(\hat{\theta}_{i(1)})$	$a_i(\hat{\theta}_{i(1)})$	$b_i(\hat{\theta}_{i(1)})$	$\hat{\theta}_{i(2)}$
0,517423	*-0,13724*	*1,381484*	*0,154511*	0,692896
0,465095	*-0,08855*	*1,391497*	*0,243586*	0,574089
0,963599	*0,156425*	*1,096537*	*0,005605*	0,780862
0,56707	*-0,11264*	*1,208297*	*0,139025*	0,690819
0,543347	*-0,01036*	*2,38517*	*0,387671*	0,543676
0,317436	*-0,07681*	*1,522267*	*0,336913*	0,418795
0,692058	*-0,07514*	*1,348173*	*0,146726*	0,77958

Pada tabel. 4. 2 ini diperoleh akar dari $F_i(\theta)$ untuk $i=1,2,...,7$ adalah

$$\hat{\theta}_{(2)} = [0.692 \quad 0.574 \quad 0.781 \quad 0.691 \quad 0.544 \quad 0.419 \quad 0.780]$$

- Iterasi 3 (t = 3), maka

$\hat{\theta}_{(2)} = [0.692 \quad 0.574 \quad 0.781 \quad 0.691 \quad 0.544 \quad 0.419 \quad 0.780]$ adalah nilai awal untuk iterasi 3, berikut ini diberikan tabel penyelesaian akar dengan metode Newton-Raphson.

Tabel. 4. 3. Tabel Iterasi 3 dari Penyelesaian Akar.

$\hat{\theta}_{i(2)}$	$F_i(\hat{\theta}_{i(2)})$	$a_i(\hat{\theta}_{i(2)})$	$b_i(\hat{\theta}_{i(2)})$	$\hat{\theta}_{i(3)}$
0,692896	*0,000431*	*1,173078*	*0,037553*	0,691755
0,574089	*-0,00851*	*1,284832*	*0,150991*	0,584329
0,780862	*0,023259*	*1,841953*	*0,153979*	0,737023
0,690819	*-0,00846*	*1,149994*	*0,077057*	0,699925
0,543676	*-0,01326*	*2,306033*	*0,368699*	0,572994
0,418795	*-0,00935*	*1,39276*	*0,227255*	0,431062
0,77958	*-0,00833*	*1,242061*	*0,081163*	0,789252

pada tabel. 4. 3 ini diperoleh akar dari $F_i(\theta)$ untuk $i=1,2,...,7$ adalah

$\hat{\theta}_{(3)} = [0.692 \quad 0.584 \quad 0.737 \quad 0.670 \quad 0.573 \quad 0.431 \quad 0.790]$.

- Iterasi 4 (t = 4), maka

$\hat{\theta}_{(3)} = [0.692 \quad 0.584 \quad 0.737 \quad 0.670 \quad 0.573 \quad 0.431 \quad 0.790]$ adalah nilai awal untuk iterasi 4, berikut ini diberikan tabel penyelesaian akar dengan metode Newton-Raphson.

Tabel. 4. 4. Tabel Iterasi 4 dari Penyelesaian Akar.

$\hat{\theta}_{i(3)}$	$F_i(\hat{\theta}_{i(3)})$	$a_i(\hat{\theta}_{i(3)})$	$b_i(\hat{\theta}_{i(3)})$	$\hat{\theta}_{i(4)}$
0.691755	*-0.00073*	*1.171152*	*0.03694*	*0.692436*
0.584329	*-0.00123*	*1.271474*	*0.140029*	*0.585703*
0.737623	*0.000602*	*2.159186*	*0.21245*	*0.736004*
0.699925	*-0.00089*	*1.143849*	*0.071376*	*0.700777*
0.572994	*-0.00157*	*2.085155*	*0.31121*	*0.575952*
0.431062	*-0.00157*	*1.372738*	*0.210635*	*0.43302*
0.789252	*-0.00088*	*1.228169*	*0.073386*	*0.790157*

pada tabel. 4. 4 ini diperoleh akar dari $F_i(\theta)$ untuk $i=1,2,...,7$ adalah

$\hat{\theta}_{(4)}=[0.692 \quad 0.585 \quad 0.737 \quad 0.701 \quad 0.576 \quad 0.433 \quad 0.790]$.

Dari keempat iterasi yang telah dilakukan, tampak bahwa $\hat{\theta}$ yang merupakan akar-akar dari fungsi $F_i(\theta)$ untuk $i=1,2,...,7$ nilainya konvergen ke $\hat{\theta}_{(4)}=[0.692 \quad 0.585 \quad 0.737 \quad 0.701 \quad 0.576 \quad 0.433 \quad 0.790]$, sehingga iterasi dapat dihentikan dan diambil kesimpulan bahwa akar-akar dari $F_i(\theta)$ untuk $i=1,2,...,7$ adalah $\hat{\theta}=diag[0.692 \quad 0.585 \quad 0.737 \quad 0.701 \quad 0.577 \quad 0.433 \quad 0.790]$.

Lalu ditentukan $\hat{p}_i^*$ untuk $i=1,2,...,7$ dengan $\hat{p}_i^*=1-(1-\frac{n_{ii}}{n_i})/(1-\hat{\theta}_i)$ sebagai berikut:

$$\hat{p}_1^*=1-\frac{(1-0.705)}{(1-0.692)}=0.042 \qquad \hat{p}_5^*=1-\frac{(1-0.680)}{(1-0.577)}=0.118$$

$$\hat{p}_2^*=1-\frac{(1-0.633)}{(1-0.585)}=0.116 \qquad \hat{p}_6^*=1-\frac{(1-0.504)}{(1-0.433)}=0.126$$

$$\hat{p}_3^*=1-\frac{(1-0.809)}{(1-0.737)}=0.275 \qquad \hat{p}_7^*=1-\frac{(1-0.815)}{(1-0.790)}=0.118$$

$$\hat{p}_4^*=1-\frac{(1-0.725)}{(1-0.701)}=0.078$$

atau

$$\hat{p}^*=[0.042 \quad 0.116 \quad 0.275 \quad 0.078 \quad 0.245 \quad 0.126 \quad 0.119].$$

Dengan demikian dapat diperoleh nilai *log-likelihood* dari matriks estimasi probabilitas transisi maksimum likelihood *restricted* yaitu

$$lnl_R = \sum_{i=1}^{s}\{n_{ii}\, ln(\theta_i+(1-\theta_i)p_i^*)+(\tilde{n}_i-n_{ii})ln(p_i^*)+(n_i-n_{ii})ln(1-\theta_i)\}$$

$= -1372.04$ (Lampiran 3).

Matriks estimasi probabilitas transisi $\hat{Q}$ pada kasus ini diberikan sebagai $\hat{p}_{ij}=\hat{\theta}_i\delta_{ij}+(1-\hat{\theta}_i)\hat{p}_j^*$ dengan $\delta_{ii}=1$ dan $\delta_{ij}=0$ untuk $i\neq j$

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} 0.705 & 0.036 & 0.085 & 0.024 & 0.075 & 0.039 & 0.036 \\ 0.017 & 0.633 & 0.114 & 0.032 & 0.102 & 0.052 & 0.049 \\ 0.011 & 0.031 & 0.809 & 0.021 & 0.064 & 0.033 & 0.031 \\ 0.013 & 0.035 & 0.082 & 0.725 & 0.073 & 0.038 & 0.035 \\ 0.018 & 0.049 & 0.116 & 0.033 & 0.680 & 0.053 & 0.050 \\ 0.024 & 0.066 & 0.156 & 0.044 & 0.139 & 0504 & 0.067 \\ 0.009 & 0.024 & 0.058 & 0.016 & 0.051 & 0.026 & 0.815 \end{bmatrix}.$$

Dari hasil yang diperoleh dapat digambarkan misal seorang pekerja pada bidang pekerjaan konstruksi (*state 2*) mempunyai estimasi probabilitas keluar atau dikeluarkan dari bidang pekerjaan ini sebesar $1\text{-}0.585 = 0.415$ dan probabilitasnya diterima di bidang pekerjaan perdagangan partai besar maupun eceran (*state 5*) sebesar 0.245. Artinya estimasi probabilitas seorang pekerja keluar atau dikeluarkan dari bidang pekerjaan konstruksi kemudian diterima di bidang pekerjaan perdagangan partai besar maupun eceran ($\hat{p}_{25}$) adalah sebesar $(1\text{-}0.585)$ $0.245 = 0.102$.

4.3.2 Uji Chi-Kuadrat untuk Kesesuaian Model

Pada subbab ini dilakukan uji hipotesis untuk melihat apakah matriks probabilitas transisi yang diberikan pada model rantai Markov untuk pekerja yang tidak berketrampilan ini sesuai dengan data. Maka dapat ditentukan beberapa langkah sebagai berikut:

- Hipotesis-hipotesis :

  $H_0 : Q = \theta + (I - \theta)1p^*$ (Matriks probabilitas transisi yang diberikan pada model rantai Markov untuk pekerja yang tidak berketrampilan ini sesuai dengan data).

  Melawan

  $H_1 : Q \neq \theta + (I - \theta)1p^*$ (Matriks probabilitas transisi yang diberikan pada model rantai Markov untuk pekerja yang tidak berketrampilan ini tidak sesuai dengan data).

- Tingkat signifikansi yang dipilih adalah $\alpha = 5\%$.

- Statistik uji :

  Nilai statistik uji rasio untuk data ini adalah

$$
\begin{aligned}
-2\ln\gamma &= -2\ln\left(\frac{l_R}{l_U}\right) \\
&= -2\left(\ln l_R - \ln l_U\right) \\
&= -2\left(-1372.04 + 1350.32\right) = 43.44\,.
\end{aligned}
$$

- Daerah kritis

  H_0 ditolak jika $-2\ln\gamma < x^2_{\alpha;s(s-1)}$.

  Dengan interpolasi yang didasarkan pada tabel chi-kuadrat (Lampiran.4) nilai $x^2_{\alpha;s(s-1)} = x^2_{0.05;42} = 58.11$.

- Pengambilan keputusan

  Dari perhitungan diperoleh bahwa $-2\ln\gamma = 43.44 < x^2_{0.05;42} = 58.11$, jadi H_0 ditolak.

- Kesimpulan

  Dengan tingkat kepercayaan sebesar *95%* dapat diyakini bahwa model rantai Markov yang diberikan tidak sesuai dengan data. Artinya model rantai Markov yang dibahas ini tidak dapat menggambarkan data yang diberikan pada contoh kasus yang diberikan.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya, dapat diambil kesimpulan bahwa perpindahan pekerja yang tidak berketrampilan dapat dimodelkan sebagai model rantai Markov karena kasus ini memenuhi dua aturan penting dalam proses Markov yaitu aturan *memoryless* dan aturan waktu homogen. Estimasi probabilitas transisi pekerja yang tidak berketrampilan ini terdiri dari dua komponen yaitu matriks estimasi probabilitas transisi maksimum likelihood *unrestricted* ($\hat{Q}_U$) dan matriks estimasi probabilitas transisi maksimum likelihood *restricted* ($\hat{Q}_R$).

Dengan menggunakan metode estimasi maksimum likelihood diperoleh $\hat{Q}_U = [\hat{p}_{ij}] = \left[\frac{n_{ij}}{n_i}\right]$ dan $\hat{Q}_R = \hat{\theta} + (1-\hat{\theta})1\hat{p}^*$, $\hat{\theta}$ adalah akar-akar dari fungsi $F_i(\theta) = \theta_i + \frac{(1-\theta_i)(\tilde{p}_i - \bar{p}_i\theta_i)}{\bar{p}(1-\theta)1} - \frac{n_{ii}}{n_i}$, dengan $i = 1,2,...,s$ yang harus diselesaikan secara iteratif terhadap $\hat{\theta}$. Metode penyelesaian akar yang digunakan untuk permasalahan ini adalah metode Newton Raphson. Kemudian $\hat{p}_i^*$ untuk $i = 1,2,...,s$ ditentukan dengan $\hat{p}_i^* = 1-(1-\frac{n_{ii}}{n_i})/(1-\hat{\theta}_i)$.

5.2 Saran

Perpindahan pekerja yang tidak berketrampilan dari satu bidang pekerjaan ke bidang pekerjaan yang lain dapat dimodelkan menjadi dua model yaitu model rantai Markov dan model *mover-stayer*. Penulisan skripsi ini hanya membahas perilaku tersebut sebagai model rantai Markov. Oleh karena itu bagi pembaca yang berminat, dapat membahas perilaku ini sebagai model *mover-stayer.*